

ΕΝΟΤΗΤΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 1. Μέθοδος βυθισμένου ορίου για την αριθμητική προσομοίωση τυρβώδους ροής με ελεύθερη επιφάνεια

1.1. ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η προσομοίωση της διάδοσης θαλάσσιων κυμάτων αλλά και παλλόμενων ροών πάνω από το θαλάσσιο πυθμένα ή γύρω από αγωγούς με τις συμβατικές μεθόδους χωρικής διακριτοποίησης καθίσταται αρκετά επίπονη, λόγω της κίνησης της ελεύθερης επιφάνειας αφενός και αφετέρου λόγω της δυσκολίας αντιμετώπισης πολύπλοκων γεωμετριών. Με τη μέθοδο του εμβαπτισμένου ορίου, η διακριτοποίηση των εξισώσεων ροής γίνεται σε καρτεσιανό πλέγμα με ορθογώνια κελιά και η εφαρμογή οριακών συνθηκών σε στερεά όρια επιτυγχάνεται μέσω πρόσθετου όρου στις εξισώσεις ροής (Balaras 2004, Yang & Stern 2009). Έτσι καθίσταται πιο εύκολη η αντιμετώπιση τέτοιων ροών. Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι η προσομοίωση και της κίνησης ελεύθερης επιφάνειας μέσω της ΜΕΟ όπου η ροή αντιμετωπίζεται ως διφασική ροή ύδατος-αέρα κοντά στην ελεύθερη επιφάνεια κατά τη διάδοση κυμάτων.

1.2. ΜΕΘΟΔΟΛΟΓΙΑ

Στην παρούσα εργασία εξετάζονται δυσδιάστατες ροές με ελεύθερη επιφάνεια αλλά και γύρω από κύλινδρο. Για την προσομοίωση τέτοιων ροών γίνεται χρήση των φιλτραρισμένων, λόγω προσομοίωσης μεγάλης δίνης LES, εξισώσεων Navier- Stokes. Μέσω του φιλτραρίσματος αυτού, οι εξισώσεις ροής αφορούν τις επιλυόμενες μεγάλες κλίμακες της ροής. Σε αδιάστατη μορφή οι εξισώσεις αυτές μπορούν να γραφούν ως:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \bar{P}}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} + \frac{\partial \tau_{ij}^n}{\partial y} + \frac{1}{Re} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right) + f_i \quad (1.1)$$

όπου P είναι η ολική πίεση, t ο χρόνος, Re ο αριθμός Reynolds, τ_{ij} είναι ο όρος που αφορά τις υποπλεγματικές, μη επιλυόμενες τάσεις δίνης SGS, οι οποίες προκύπτουν από το μοντέλο LES και f είναι ένας επιπρόσθετος όρος που σχετίζεται με την μεθοδολογία του εμβαπτισμένου ορίου για την εφαρμογή των συνοριακών συνθηκών μη ολίσθησης στα στερεά όρια (βλ. ενότητα 1.3). Οι εξισώσεις αυτές επιλύονται ενιαία σε όλο το πεδίο θεωρώντας ένα και μόνο ρευστό με συνδυασμένη ταχύτητα u η οποία δίνεται από τη σχέση:

$$\bar{u} = \theta \bar{u}_w + (1 - \theta) \bar{u}_a \quad (1.2)$$

όπου θ παριστάνει το κλάσμα όγκου του ύδατος σε κάθε κελί και παίρνει τιμές $0 \leq \theta \leq 1$. Επιπρόσθετα, ρ είναι η πυκνότητα και ν το κινηματικό ιξώδες του ενιαίου ρευστού, αδιαστατοποιημένα με τις αντίστοιχες τιμές του ύδατος ρ_w , ν_w :

$$\rho = \frac{\rho_a + (\rho_w - \rho_a) H_\varepsilon(\varphi)}{\rho_w} \quad (1.3)$$

$$\nu = \frac{\nu_a + (\nu_w - \nu_a) H_\varepsilon(\varphi)}{\nu_w} \quad (1.4)$$

όπου

$$H_\varepsilon(\phi) = \begin{cases} 1, & \phi > \varepsilon \\ \frac{1}{2} \left[1 + \frac{\phi}{\varepsilon} + \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{\pi\phi}{\varepsilon}\right) \right], & |\phi| \leq \varepsilon \\ 0, & \phi < -\varepsilon \end{cases} \quad (1.5)$$

είναι μια ομαλοποιημένη εξίσωση Heaviside και φ αποτελεί την συνάρτηση της απόστασης μέσω της οποίας γίνεται και η εξέλιξη της ελεύθερης επιφάνειας (level-set method). Ο όρος τ_{ij} που αφορά τις υποπλεγματικές τάσεις δύνης SGS μοντελοποιείται μέσω ενός μοντέλου Smagorinsky σύμφωνα με το οποίο:

$$\tau_{ij} = -2\nu_\tau \bar{S}_{ij} = -2(C_s \bar{\Delta})^2 |\bar{S}| \bar{S}_{ij} \quad (1.6)$$

όπου δ_{ij} είναι το δέλτα του Kronecker και C_s είναι παράμετρος του μοντέλου. Επιπλέον

$$\bar{\Delta} = (\Delta_1 \Delta_2 \Delta_3)^{1/3} \quad (1.7)$$

είναι η κλίμακα του φίλτρου αποκοπής, ταυτιζόμενη με το μέγεθος της μικρότερης επιλυόμενης κλίμακας με βάση τις διαστάσεις των κελιών του πλέγματος και

$$\bar{S}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.8)$$

είναι ο τανυστής του ρυθμού παραμόρφωσης για τις επιλυόμενες κλίμακες όπου

$$|\bar{S}| = (2\bar{S}_{ij} \bar{S}_{ij})^{1/2} \quad (1.9)$$

είναι το μέτρο του.

Η χωρική διακριτοποίηση των παραπάνω εξισώσεων βασίζεται στον υπολογισμό των εξαρτημένων μεταβλητών σε διαφορετικούς κόμβους ενός έκκεντρου πλέγματος. Για τη χρονική διακριτοποίηση χρησιμοποιείται η μέθοδος του κλασματικού χρονοβήματος. Αρχικά υπολογίζεται μια ενδιάμεση ταχύτητα χωρίς να λαμβάνεται υπόψη η πίεση:

$$\frac{\vec{u}^* - \vec{u}^n}{\Delta t} = \frac{3}{2} H(\vec{u}^n) - \frac{1}{2} H(\vec{u}^{n-1}) + [\vec{f}^{n+1}]_{IB} \quad (1.10)$$

όπου H είναι ένας χωρικός τελεστής που περιλαμβάνει τους όρους μεταγωγής, διάχυσης και υποπλεγματικών τάσεων, οι οποίοι διακριτοποιούνται μέσω ενός σχήματος Adams- Bashforth. Στη συνέχεια η ταχύτητα διορθώνεται από τις παραγώγους της ολικής πίεσης:

$$\vec{u}^{n+1} = \vec{u}^* - \frac{dt}{\rho} \nabla P \quad (1.11)$$

Οι παράγωγοι της πίεσης έχουν υπολογιστεί μέσω της επίλυσης μιας εξίσωσης Poisson, στην οποία θεωρούμε ότι ικανοποιείται η συνέχεια:

$$\nabla \left(\frac{1}{\rho} \nabla p^{n+1} \right) = -\frac{1}{dt} \left(\frac{du^*}{dx} + \frac{dv^*}{dy} \right) \quad (1.12)$$

Η διακριτοποίηση του αριστερού μέλους της εξίσωσης Poisson οδηγεί σε έναν πενταδιαγώνιο πίνακα, τα στοιχεία του οποίου ανακατασκευάζονται σε κάθε χρονοβήμα εξαιτίας της εξέλιξης της ελεύθερης επιφάνειας. Η αντιστροφή του πίνακα επιτυγχάνεται παράλληλα μέσω μιας LU διάσπασης (decomposition) χρησιμοποιώντας την βιβλιοθήκη της Intel MKL PARDISO 13.0.

Όπως και ο πυθμένας, και η ελεύθερη επιφάνεια θεωρούνται επιφάνειες εμβαπτισμένες στο αριθμητικό πλέγμα. Η εξέλιξη της ελεύθερης επιφάνειας γίνεται μέσω της μεθόδου level set. Αρχικά υπολογίζεται η απόσταση κάθε σημείου του καννάβου από την ελεύθερη επιφάνεια, στην οποία η συνάρτηση της απόστασης ϕ θεωρείται μηδενική. Η συνάρτηση της απόστασης ϕ έχει και κατάλληλη σήμανση, αφού οι αποστάσεις των σημείων του καννάβου που βρίσκονται στον αέρα παίρνουν αρνητικό πρόσημο, ενώ των σημείων που βρίσκονται στο νερό θετικό. Στη συνέχεια η εξέλιξη της ελεύθερης επιφάνειας γίνεται μέσω της εξίσωσης:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \phi = 0 \quad (1.13)$$

Σε κάθε χρονοβήμα επιλύεται επαναληπτικά και η εξίσωση επαναπροσδιορισμού του ϕ , ώστε αυτό να παραμένει μια συνάρτηση απόστασης προσήμου,

$$\frac{\partial \phi}{\partial \tau} = \text{sign}(\phi)(1 - |\nabla \phi|) \quad (1.14)$$

όπου τ είναι ένας ψευδοχρόνος και $\text{sign}\phi$ η συνάρτηση προσήμου. Για την προσέγγιση της ελεύθερης επιφάνειας χρησιμοποιήθηκε και η μεθοδολογία VOF μέσω της επίλυσης της εξίσωσης διατήρησης της μάζας του κλάσματος όγκου του νερού:

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} = -\nabla \cdot (\mathcal{G} \vec{u}) \quad (1.15)$$

Για λόγους όμως πιο άμεσου και ακριβούς προσδιορισμού της ελεύθερης επιφάνειας προτιμήθηκε η μέθοδος level-set.

1.3. ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΜΒΑΠΤΙΣΜΕΝΟΥ ΟΡΙΟΥ

Ο πυθμένας, οι κυματοθραύστες και η ελεύθερη επιφάνεια είναι επιφάνειες εμβαπτισμένες στο υπολογιστικό πλέγμα. Η μέθοδος αυτή στηρίζεται στην προσθήκη, όπως είδαμε και νωρίτερα, ενός επιπλέον όρου στις εξισώσεις Navier-Stokes. Πρόκειται για έναν όρο-συνάρτηση $\vec{f}^{n+1}$ ο οποίος επιβάλλει μέσω παρεμβολής τις κατάλληλες συνοριακές συνθήκες σε ένα καθορισμένο εμβαπτισμένο όριο, το οποίο όμως δεν συμπίπτει με τους κόμβους του υπολογιστικού πλέγματος. Πιο συγκεκριμένα αυτή η συνάρτηση επιβάλλεται σε συγκεκριμένα σημεία του υπολογιστικού πλέγματος, τα οποία βρίσκονται πλησίον του ορίου. Η αναλυτική διαδικασία για την εύρεση των σημείων αυτών, τα οποία ονομάζονται forcing points δίνεται στο άρθρο του Balaras (2004) και συνοψίζεται εδώ.

Κάθε εμβαπτισμένο όριο, όπως η διεπιφάνεια υγρού-στερεού αποτελεί ασυνέχεια στο υπολογιστικό πλέγμα. Αυτή η ασυνέχεια ψ αποτελείται από ένα σύνολο σημείων με συντεταγμένες $\vec{X}(s)$ κατά μήκος της. Οι αποστάσεις ds αυτών των σημείων είναι ίσες περίπου με τις διαστάσεις του υπολογιστικού πλέγματος. Η αρχή αυτών των συντεταγμένων τοποθετείται έτσι ώστε καθώς ο παρατηρητής κινείται προς τα εκεί που η απόσταση s της ασυνέχειας αυξάνει, το ρευστό να παραμένει πάντα στα αριστερά του. Μπορούμε να προσδιορίσουμε τις συντεταγμένες των σημείων αυτών προσαρμόζοντας ένα δευτεροβάθμιο πολυώνυμο σε τρία διαδοχικά σημεία της ασυνέχειας και επιλύοντας ένα σύστημα για την εύρεση των συντελεστών του πολυωνύμου αυτού

$$x(s) = a_x s^2 + b_x s + c_x \quad (1.16)$$

$$y(s) = a_y s^2 + b_y s + c_y \quad (1.17)$$

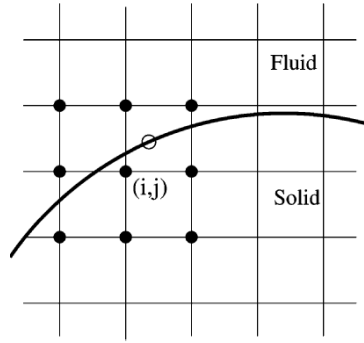
Έχοντας προσδιορίσει τους συντελεστές του πολυωνύμου μπορούμε εκτός από τις συντεταγμένες οποιουδήποτε σημείου επάνω στην ασυνέχεια να προσδιορίσουμε και τις συντεταγμένες των καθέτων μοναδιαίων διανυσμάτων από αυτά τα σημεία προς το ρευστό ως:

$$n_x = \frac{-y_s}{(x_s^2 + y_s^2)^{1/2}} = \frac{-2a_{yib}s_2 - b_{yib}}{\sqrt{(2a_{xib}s_2 + b_{xib})^2 + (2a_{yib}s_2 + b_{yib})^2}} \quad (1.18)$$

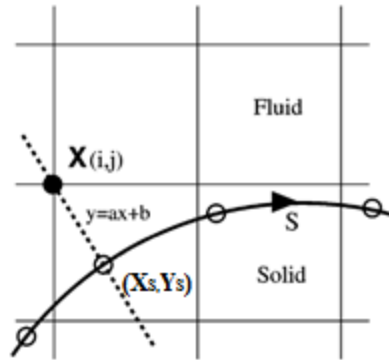
$$n_y = \frac{x_s}{(x_s^2 + y_s^2)^{1/2}} = \frac{2a_{xib}s_2 + b_{xib}}{\sqrt{(2a_{xib}s_2 + b_{xib})^2 + (2a_{yib}s_2 + b_{yib})^2}} \quad (1.19)$$

Στη συνέχεια μπορούμε σε κάθε τέτοιο σημείο επί της ασυνέχειας να εντοπίσουμε το κοντινότερο σε αυτό σημείο του υπολογιστικού πλέγματος μέσω μια διαδικασίας ανίχνευσης. Έχοντας βρει το κοντινότερο σημείο που ανήκει στο πλέγμα (i, j) παίρνουμε ένα σύνολο εννέα σημείων (m, p) πάνω στο υπολογιστικό πλέγμα με κεντρικό σημείο το (i, j) χωρίς όμως να γνωρίζουμε ποιά από αυτά τα εννέα σημεία ανήκουν στη ρευστή και ποιά στη στερεά φάση

(Σχήμα 1.1). Έτσι από κάθε τέτοιο σημείο (m, p) του πλέγματος φέρνουμε μια ευθεία κάθετη ως προς την ασυνέχεια που την τέμνει σε κάποιο σημείο με συντεταγμένες (x_s, y_s) το οποίο μπορεί να προσδιοριστεί από την επίλυση του συστήματος των εξισώσεων της καθέτου και της ασυνέχειας (Σχήμα 1.2). Πιο συγκεκριμένα πρέπει να επιλύσουμε το σύστημα $y_s = \alpha x_s + \beta$ (κάθετη) και $x_s = a_x s^2 + b_x s + c_x$, $y_s = a_y s^2 + b_y s + c_y$ (εξίσωση της ασυνέχειας).



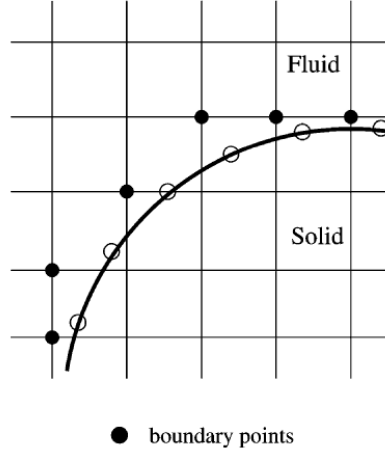
Σχήμα 1.1: Σύνολο εννέα σημείων (m, p) του υπολογιστικού πλέγματος.



Σχήμα 1.2: Κάθετη πάνω στην ασυνέχεια από κάθε σημείο του συνόλου των εννέα σημείων (m, p) του πλέγματος.

Ακολουθείται μια επαναληπτική επίλυση με τη μέθοδο Newton- Raphson για την επίλυση του συστήματος. Βρίσκω ακολούθως τα διανύσματα $\vec{x}_v, \vec{y}_v$ που έχουν αρχή τα (x_s, y_s) και πέρας τα (x_m, y_p) . Για να καταταχθούν τα εννέα σημεία στην φάση του ρευστού ή του στερεού υπολογίζεται το εσωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων $\vec{x}_v, \vec{y}_v$ με τα κάθετα διανύσματα από την ασυνέχεια προς το ρευστό όπως αυτά υπολογίζονται από τις σχέσεις (1.18) και (1.19) και αν το αποτέλεσμα βγει θετικό τότε τα σημεία κατατάσσονται στην στερεά φάση ειδικά στην υγρή. Τα σημεία (m, p) που ανήκουν στην υγρή φάση αποκτούν ένα δείκτη -1 για να διαχωρίζονται από αυτά που ανήκουν στη στερεά φάση, τα οποία αποκτούν ένα δείκτη 1. Όλα τα υπόλοιπα σημεία έχουν δείκτη 0. Έτσι όλα τα σημεία του πεδίου έχουν δείκτες -1, 1, 0. Από όλα τα σημεία του ρευστού που έχουν δείκτη -1 βρίσκουμε αυτά τα σημεία που έχουν ένα τουλάχιστον

γειτονικό σημείο το οποίο βρίσκεται στη στερεά φάση και κρατάμε σε αυτά δείκτη -1 (forcing-boundary points) ενώ σε όλα τα υπόλοιπα επανατοποθετούμε δείκτη 0. Άρα μπορούμε ανάλογα με τη σήμανση να γνωρίζουμε τη θέση του κάθε σημείου (i, j) του καννάβου (Σχήμα 1.3).



Σχήμα 1.3: Προσδιορισμός των κοντινότερων σημείων επί της ασυνέχειας που ανήκουν στο ρευστό (forcing/boundary points).

Αφού έχουν βρεθεί τα forcing points, τα οποία είναι τα σημεία του υπολογιστικού πλέγματος που βρίσκονται πιο κοντά στην ασυνέχεια, επιβάλλονται σε αυτά τιμές διαφόρων μεταβλητών, όπως η ταχύτητα μέσω μιας διαδικασίας παρεμβολής έτσι ώστε πάνω στην ασυνέχεια οι τιμές των μεταβλητών να είναι κατάλληλες. Έτσι όσον αφορά την ταχύτητα $u=0$ λόγω της συνθήκης μη ολίσθησης και $v=0$ λόγω του στερεού ορίου. Η παραπάνω διαδικασία εφαρμόζεται στις εξισώσεις Navier- Stokes μέσω του επιπρόσθετου όρου f και μόνο στα forcing points. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται για καθεμία από τις παραμέτρους ροής (πίεση p , ταχύτητα u , ταχύτητα v) λόγω του έκκεντρου πλέγματος.

1.4. ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ

1.4.1. Διάδοση κύματος υπεράνω ακτής σταθερής κλίσης

Η πρώτη περίπτωση που εξετάζεται είναι διάδοση και θραύση κύματος υπεράνω ακτής με κλίση $\tan\beta=1/35$. Πιο συγκεκριμένα μελετάται η συμπεριφορά της ροής στη ζώνη θραύσης και απόσβεσης καθώς ένα κύμα εκχείλισης διαδίδεται υπεράνω της ακτής. Η περιοχή εισόδου του υπολογιστικού πεδίου αποτελείται από έναν οριζόντιο πυθμένα με μήκος ίσο με δύο μήκη κύματος, ώστε τα διαδιδόμενα κύματα να προσεγγίζουν την ακτή πλήρως ανεπτυγμένα. Τα προσπίπτοντα κύματα δημιουργούνται από μια κυματογεννήτρια τύπου εμβόλου στο αριστερό όριο του πεδίου. Η επιβαλλόμενη οριζόντια ταχύτητα που δίνεται από τη σχέση:

$$u_0 = \frac{1}{2} S_0 \omega \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{H^2}{32d} 2\omega \left(\frac{3\cosh(kd)}{\sinh^3(kd)} - 2S_0 \right) \cos\left(2\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right)\right) \quad (1.20)$$

όπου

$$S_0 = H \frac{(\sinh(2kd) + 2kd)}{4\sinh^2(kd)} \quad (1.21)$$

διορθώνεται ώστε να επιτυγχάνεται μηδενική μέση παροχή μάζας.

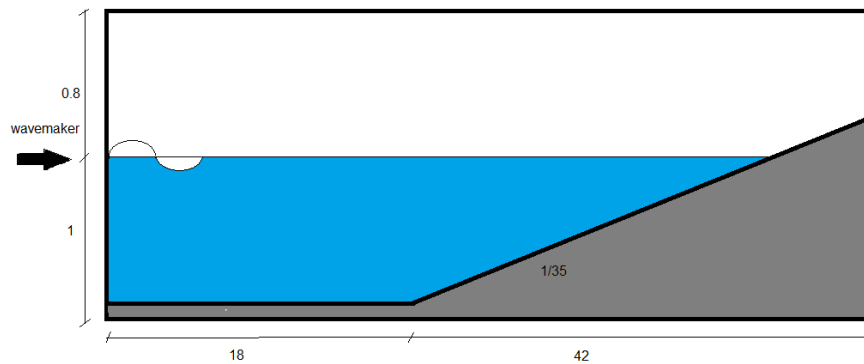
Για την αντιμετώπιση των φαινομένων ανάκλασης του κυματισμού από το όριο εισόδου (κυματογεννήτρια) του υπολογιστικού πεδίου χρησιμοποιείται ζώνη απορρόφησης του κύματος. Πιο συγκεκριμένα, μέσα στη ζώνη απορρόφησης, που λαμβάνεται ίση με μισό μήκος κύματος, εφαρμόζεται μια συνάρτηση απορρόφησης τόσο στην ταχύτητα όσο και στη συνάρτηση απόστασης φ της level set:

$$\theta = a_R \theta_{computed} + (1 - a_R) \theta_{target} \quad (1.22)$$

$$a_R(x_R) = 1 - \frac{\exp(x_R^{3.5}) - 1}{\exp(1) - 1} \quad \text{για } x_R \in [0; 1] \quad (1.23)$$

όπου θ είναι είτε το διάνυσμα της ταχύτητας είτε η συνάρτηση απόστασης φ και a_R ο συντελεστής απορρόφησης. Το x_R επιλέγεται έτσι ώστε το a_R να ισούται με 0 στο όριο εισόδου και 1 στην διεπιφάνεια μεταξύ της ζώνης απορρόφησης και του εσωτερικού υπολογιστικού πεδίου.

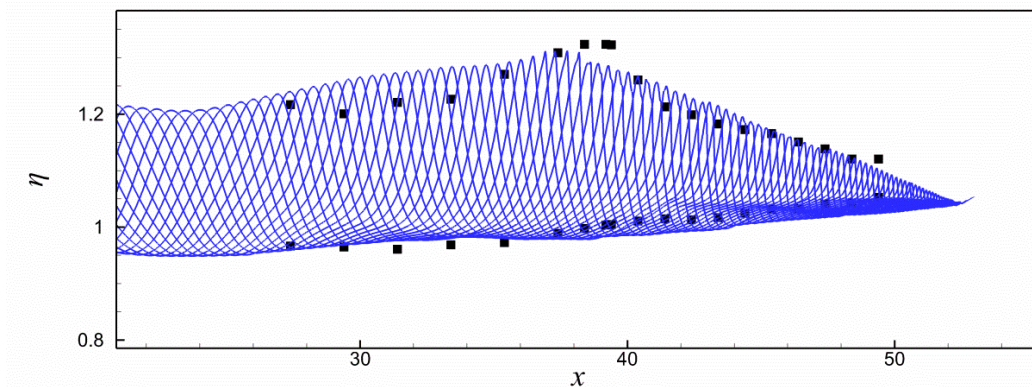
Οι διαστάσεις του πεδίου, οι οποίες αδιαστατοποιούνται με το βάθος της αδιατάρακτης στάθμης φαίνονται στο παρακάτω σκαρίφημα (Σχήμα 1.4). Το προσπίπτον κύμα έχει ύψος, περίοδο και μήκος ίσο με $H=0.25d$, $T\sqrt{g/d}=8.86$ και $\lambda=8.11d$ αντίστοιχα. Ο αριθμός Reynolds ισούται με $Re=80000$. Η κλίση της ακτής και τα χαρακτηριστικά του κύματος επιλέχθηκαν έτσι ώστε να καθίσταται ικανή η σύγκριση με υπάρχοντα πειραματικά αποτελέσματα των Ting και Kirby (1994).



Σχήμα 1.4: Σκαρίφημα του υπολογιστικού πεδίου στην περίπτωση ακτής σταθερής κλίσης 1/35.

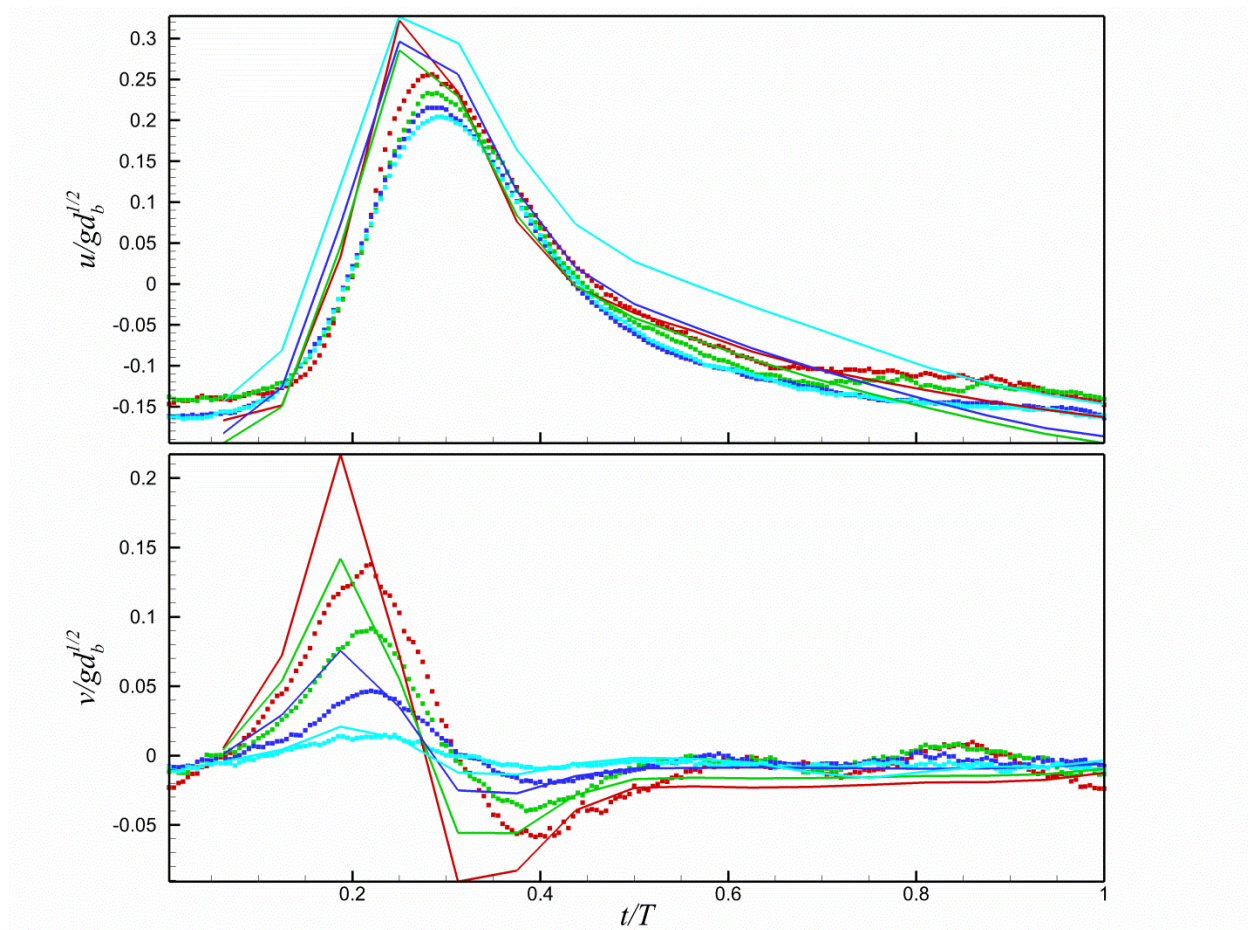
Στο Σχήμα 1.5 παρουσιάζονται στιγμιότυπα της επιλυόμενης ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας μετά την πάροδο 20 περιόδων κύματος, T , τα οποία συγκρίνονται με τα αποτελέσματα των Ting και Kirby (1994) για την μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της ανύψωσης

της ελεύθερης επιφάνειας, δηλαδή την κορυφή και την κοιλία του κύματος, αντίστοιχα. Το αριθμητικό μοντέλο υποεκτιμά την μέγιστη ανύψωση της ελεύθερης επιφάνειας και το ύψος θραύσης κατά 2.2% και 2% αντίστοιχα, σε σχέση με τα πειραματικά αποτελέσματα, ενώ υπερεκτιμά ελαφρώς το βάθος θραύσης το οποίο αντιστοιχεί στη θέση $x_b=38.2$ ενώ σύμφωνα με τα πειράματα θα έπρεπε να βρίσκεται στη θέση $x_b=39.2$. Επιπρόσθετα, στη ζώνη απόσβεσης το μοντέλο ακολουθεί σε ικανοποιητικό βαθμό τα πειραματικά αποτελέσματα. Γενικά, τα αριθμητικά αποτελέσματα για την ελάχιστη στάθμη της ελεύθερης επιφάνειας βρίσκονται σε συμφωνία με την περιβάλλουσα των κοιλιών κύματος που σχηματίζεται από τα πειραματικά δεδομένα. Να σημειωθεί ότι οι διαφορές αυτές αναμένεται να γίνουν ακόμα μικρότερες με την προσάρτηση του μοντέλου μεγάλων κυμάτων LWS.

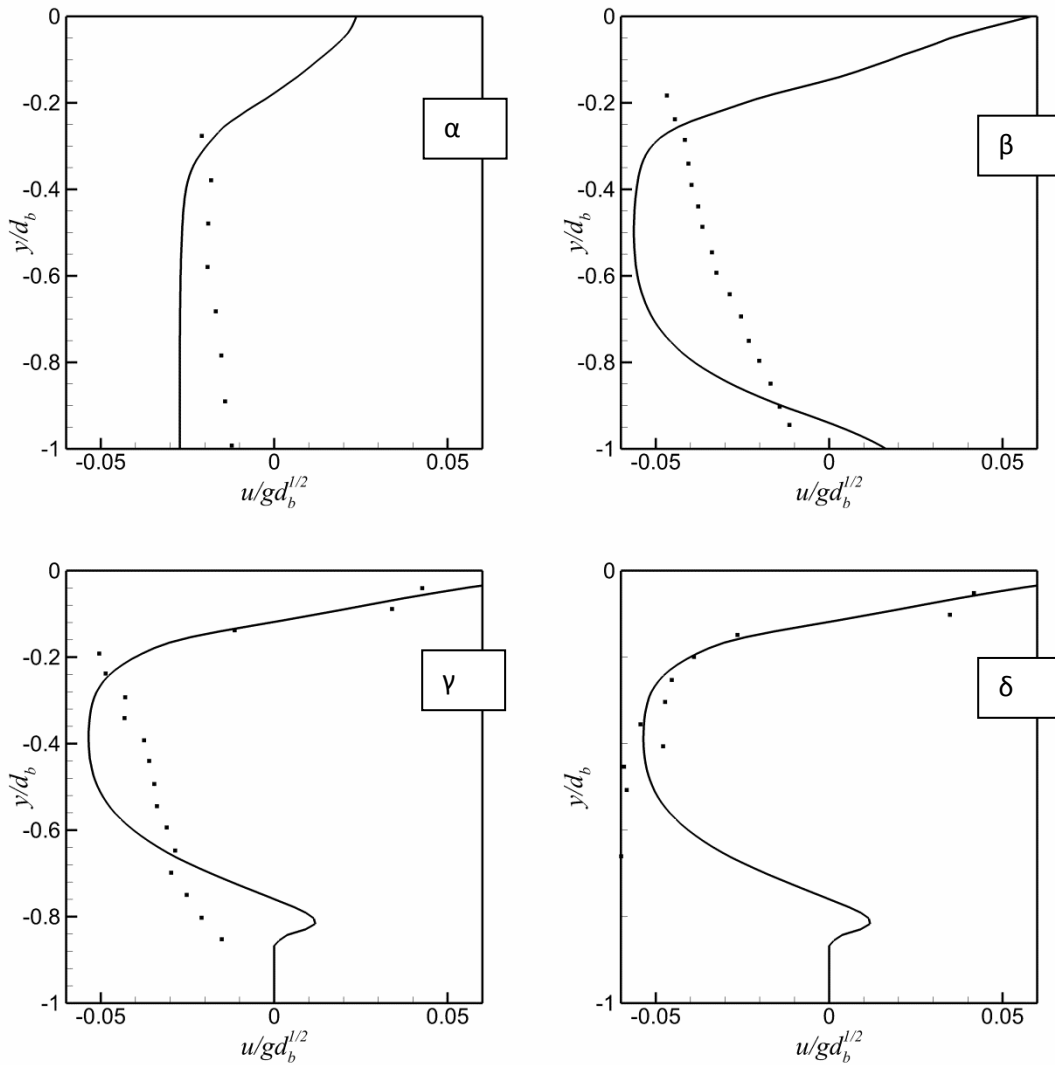


Σχήμα 1.5: Στιγμιότυπα της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας κατά τη διάδοση κύματος υπεράνω ακτής σταθερής κλίσης 1/35.

Στο Σχήμα 1.6 παρουσιάζονται η οριζόντια και η κατακόρυφη μέση, κατά φάση, ταχύτητα ροής στη θέση $h/h_b = 0.879$ (τα h , h_b αφορούν τοπικά βάθη ροής) και συγκρίνονται με τις αντίστοιχες τιμές που προκύπτουν από τα πειραματικά δεδομένα των Ting και Kirby (1996). Όσον αφορά την οριζόντια ταχύτητα παρατηρείται ότι σε βάθη πλησιέστερα στην ελεύθερη επιφάνεια υπάρχει καλύτερη ταύτιση μεταξύ των αριθμητικών και πειραματικών αποτελεσμάτων σε αντίθεση με την κατακόρυφη ταχύτητα στην οποία συμβαίνει το αντίθετο.

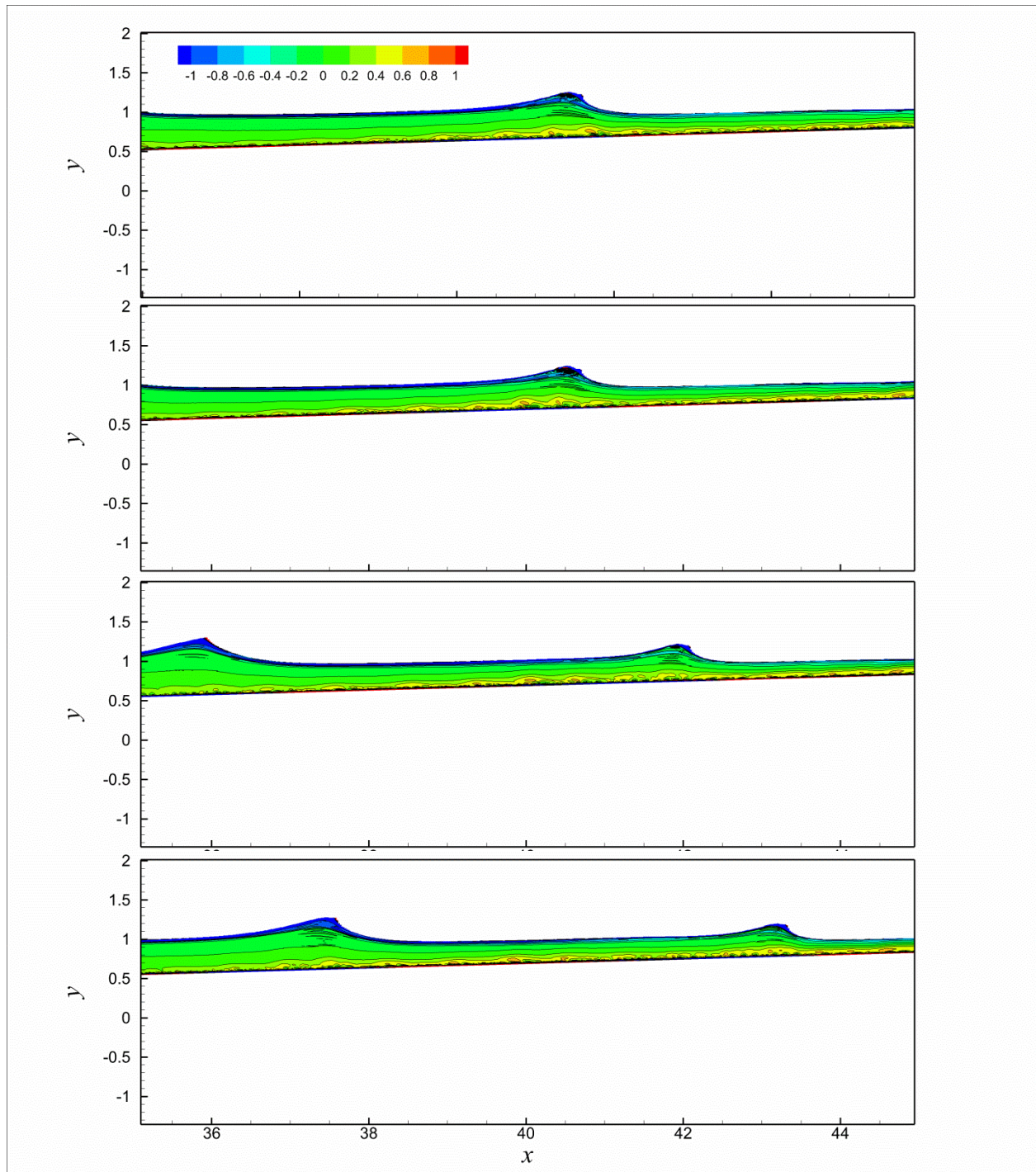


Σχήμα 1.6: Μέση, κατά φάση, οριζόντια (α) και κατακόρυφη (β) ταχύτητα στη θέση $h/h_b = 0.879$ πάνω από πυθμένα κλίσης $1/35$. Οι συνεχείς γραμμές αντιστοιχούν στα αποτελέσματα της αριθμητικής προσομοίωσης, ενώ οι διακεκομμένες αντιστοιχούν στα πειραματικά δεδομένα των Ting και Kirby (1996), στα σημεία $z/d = -0.08$ (ερυθρές καμπύλες), $z/d = -0.16$ (πράσινες καμπύλες), $z/d = -0.24$ (μπλε καμπύλες) και $z/d = -0.306$ (κυανές καμπύλες), όπου d το βάθος αδιατάρακτης στάθμης.



Σχήμα 1.7: Κατακόρυφη κατανομή της μέσης οριζόντιας ταχύτητας σε τέσσερις θέσεις κοντά στη γραμμή θραύσης (α) $x = 34.8$, (β) $x = 36.8$, (γ) $x = 38.2$, (δ) $x = 39.7$. Τα σύμβολα αντιστοιχούν στα πειραματικά δεδομένα των Ting και Kirby (1994), ενώ οι συνεχείς γραμμές στο αριθμητικό μοντέλο.

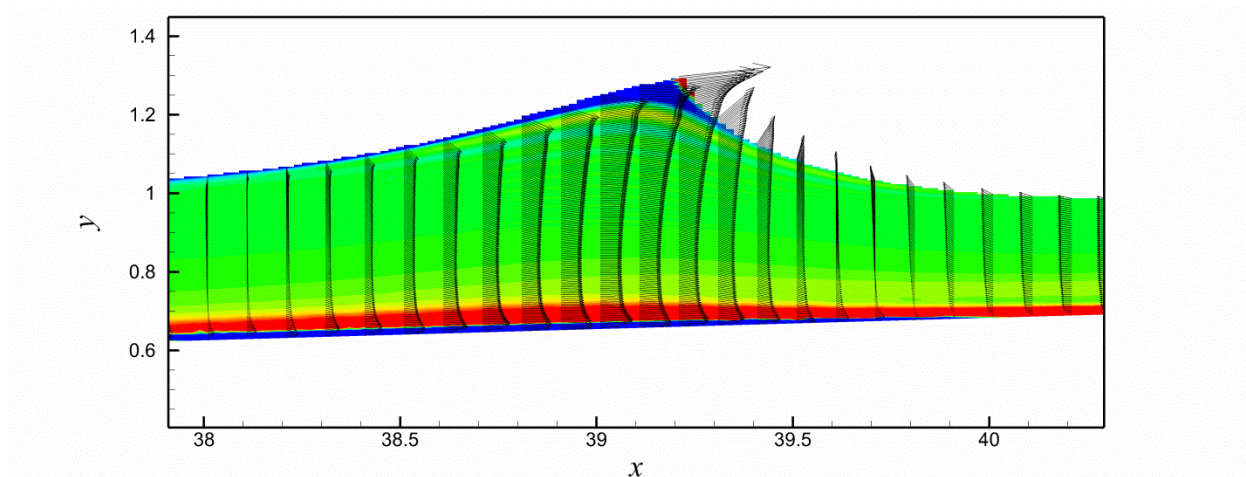
Στο Σχήμα 1.7 παρουσιάζονται τα αριθμητικά αποτελέσματα για την κατακόρυφη κατανομή του κυματογενούς ρεύματος σε τέσσερις θέσεις κοντά στη γραμμή θραύσης συγκρίνονται με τα αντίστοιχα προφίλ, προερχόμενα από τις μετρήσεις των Ting και Kirby (1994). Η μέση ως προς το χρόνο οριζόντια ταχύτητα και η κατακόρυφη συντεταγμένη κανονικοποιούνται ως προς το βάθος θραύσης. Παρατηρούμε ότι το κυματογενές ρεύμα αποτυπώνεται ικανοποιητικά.



Σχήμα 1.8: Κατανομή της στροβιλότητας κατά τη θραύση κύματος σε ακτή με σταθερή κλίση $1/35$ ανά τέταρτο της δέκατης όγδοης περιόδου. Η ελεύθερη επιφάνεια ακολουθεί τις γραμμές αφού έχουμε αφαιρέσει την περιοχή του αέρα.

Στο Σχήμα 1.8 παρουσιάζεται το πεδίο στροβιλότητας στην περιοχή θραύσης σε τέσσερα στιγμιότυπα κατά τη διάρκεια μιας περιόδου μετά τη θραύση. Η αρχική θραύση γίνεται στη θέση

με $x = 38.2$. Ένας επιφανειακός στρόβιλος δημιουργείται κάτω από τη θραυόμενη κορυφή του κύματος, ενώ έντονη στροβιλότητα αναπτύσσεται στο συνοριακό στρώμα στον πυθμένα.



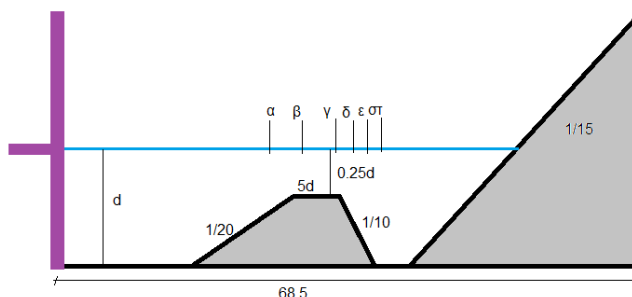
Σχήμα 1.9: Στιγμιότυπο της στροβιλότητας με τα διανύσματα της ταχύτητας στη θραύση.

1.4.2 Διάδοση κύματος υπεράνω ύφαλου κυματοθραύστη

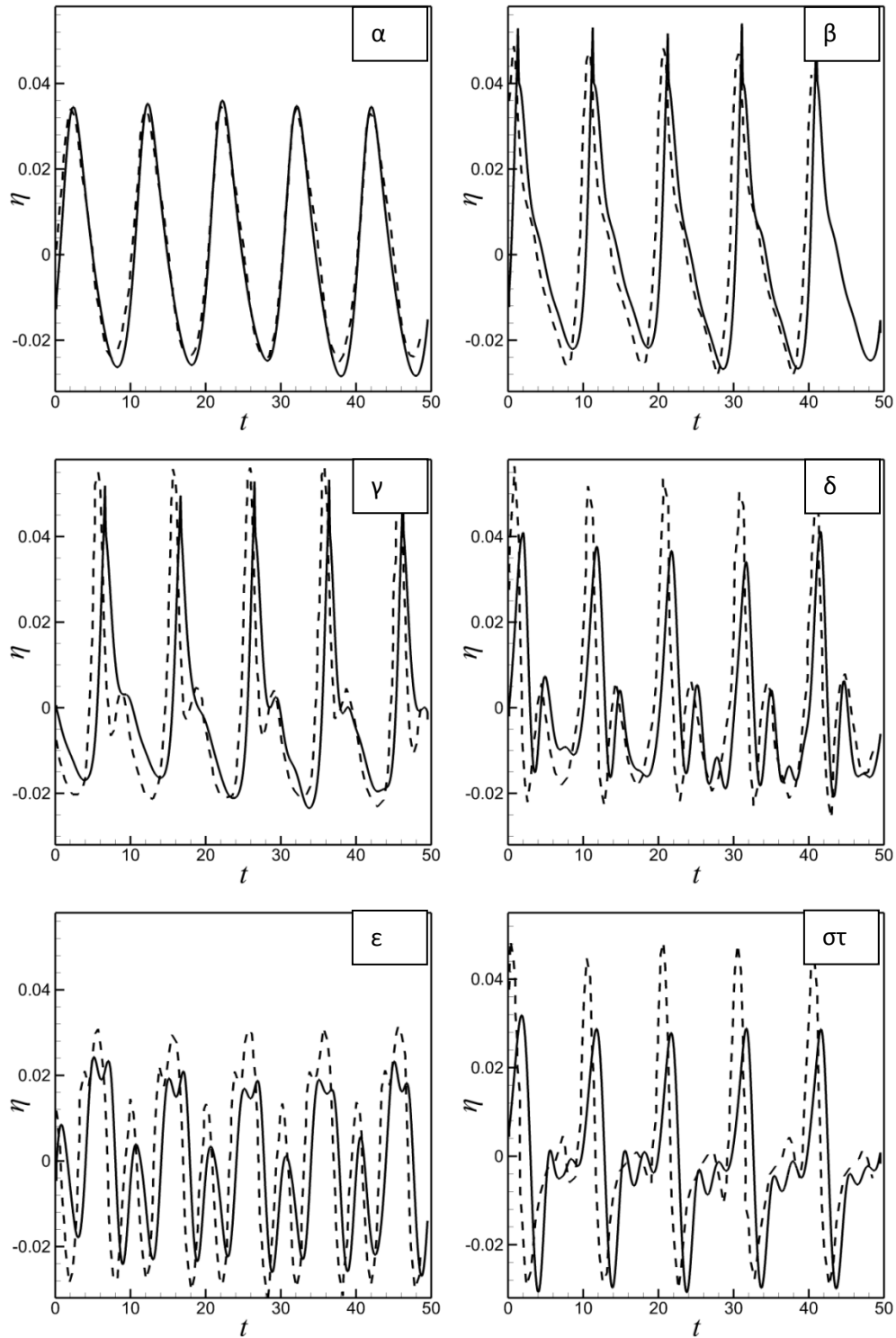
Στο Σχήμα 1.9 εστιάζουμε στην κατανομή της στροβιλότητας με τα διανύσματα της ταχύτητας κοντά στην θραυόμενη κορυφή του κύματος. Η μέγιστη ταχύτητα της ροής στην κορυφή του κύματος είναι περίπου ίση με $1.6\sqrt{gd_b}$.

1.4.2. Διάδοση κύματος υπεράνω ύφαλου κυματοθραύστη

Στην περίπτωση της διάδοσης κύματος υπεράνω ύφαλου αδιαπέρατου κυματοθραύστη επιλέγεται γεωμετρία (Σχήμα 1.10) και χαρακτηριστικά κύματος τέτοια ώστε να καθίσταται εφικτή η σύγκριση με πειραματικά δεδομένα των Beji και Battjes (1994). Τα πρηνή του κυματοθραύστη είναι ίσα με 1/20 και 1/10, το πλάτος στέψης ίσο με $5d$ και το ύψος στέψης ίσο με $0.25d$, όπου d το βάθος αδιατάρακτης στάθμης. Το ύψος κύματος στα βαθιά $H_0=0.05$ και η περίοδος $T=9.9$, αδιαστατοποιημένα ως προς το βάθος αδιατάρακτης στάθμης και την ταχύτητα του κύματος. Στο Σχήμα 1.11 παρουσιάζονται συγκρίσεις της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας ανάμεσα στις αριθμητικές προσομοιώσεις και στα πειράματα των Beji και Battjes (1994) σε διάφορες θέσεις κατά τη διαμήκη έννοια, όπως αυτές απεικονίζονται στο Σχήμα 1.10. Προκύπτει ικανοποιητική ταύτιση μεταξύ τους.

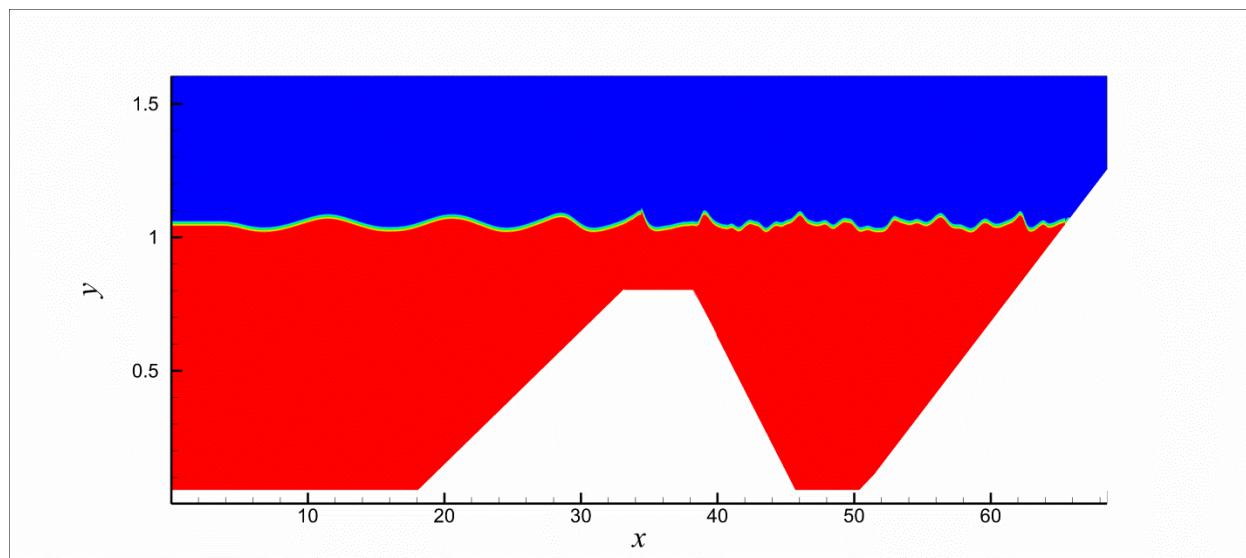


Σχήμα 1.10: Σκαρίφημα του υπολογιστικού πεδίου στην περίπτωση του ύφαλου κυματοθραύστη των Beji και Battjes (1994).

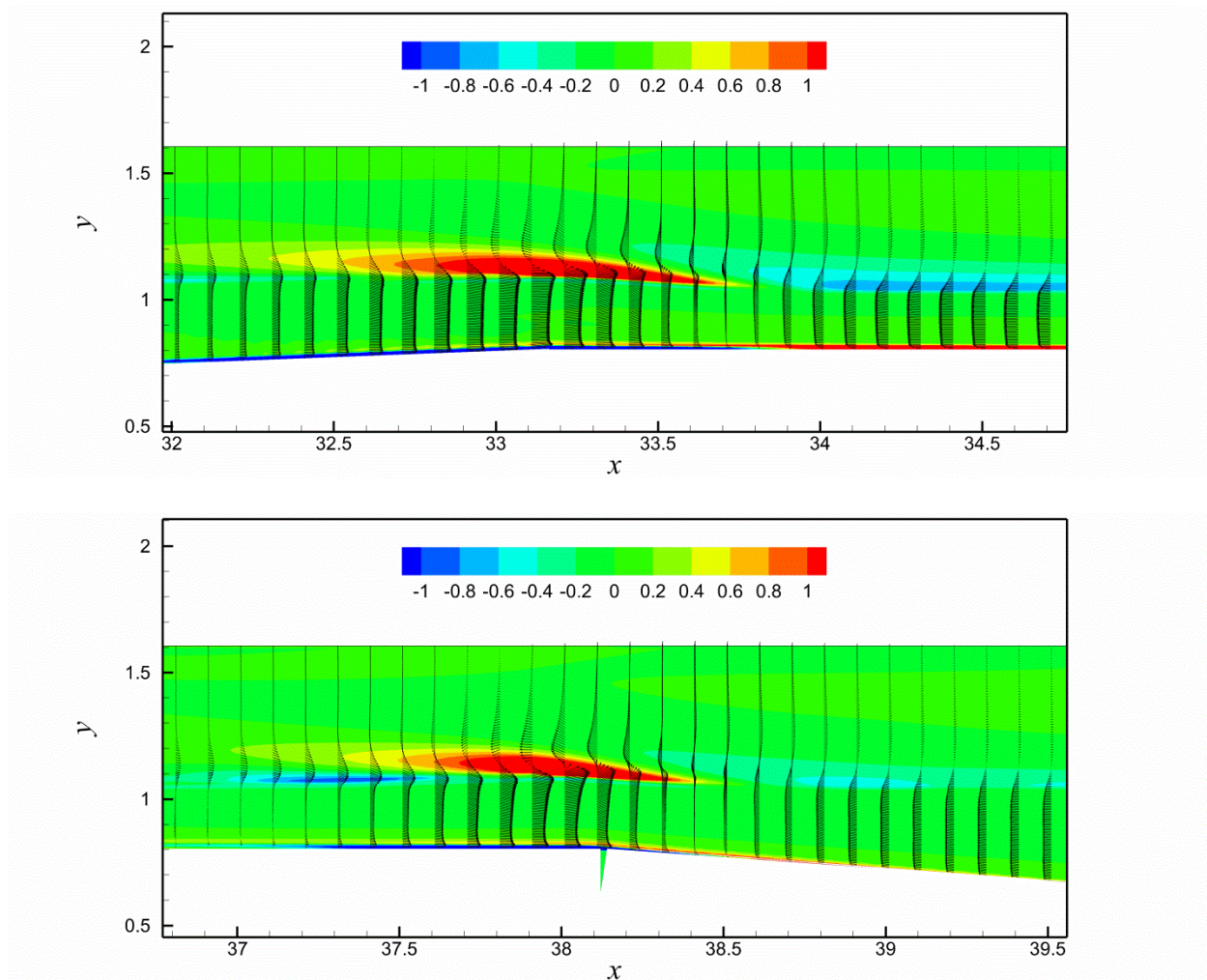


Σχήμα 1.11: Μεταβολή της ανύψωσης της ελεύθερης επιφάνειας σε διάρκεια 5 περιόδων σε διάφορες θέσεις ως προς τη διαμήκη έννοια α) $x/d = 30.12$, β) $x/d = 35.12$, γ) $x/d = 37.62$, δ) $x/d = 40.12$, ε) $x/d = 43.12$, στ) $x/d = 47.12$. (βλ. Σχήμα 1.10). Οι συνεχείς γραμμές αντιστοιχούν στα αποτελέσματα της αριθμητικής προσομοίωσης, ενώ οι διακεκομμένες αντιστοιχούν στα πειραματικά δεδομένα των Beji και Battjes (1994).

Στο Σχήμα 1.12 παρουσιάζεται η κατανομή της συνάρτησης level-set και άρα η θέση της ελεύθερης επιφάνειας στο τέλος της δέκατης τέταρτης περιόδου. Ο μετασχηματισμός της κυματομορφής καθώς το κύμα περνάει υπεράνω του κυματοθραύστη είναι εμφανής και έντονη μη γραμμικότητα παρατηρείται. Στο Σχήμα 1.13 απεικονίζεται το πεδίο στροβιλότητας με τα διανύσματα της ταχύτητας καθώς η κορυφή του κύματος φτάνει (α) και περνάει (β) τη στέψη του κυματοθραύστη. Η δημιουργία του οριακού στρώματος στο όριο του κυματοθραύστη είναι εμφανής.



Σχήμα 1.12: Μεταβολή της συνάρτησης level-set στο τέλος της δέκατης τέταρτης περιόδου.



Σχήμα 1.13: Στιγμιότυπο της κατανομής της στροβιλότητας με διανύσματα ταχύτητας καθώς η κορυφή του κύματος φτάνει (α) και περνάει (β) τη στέψη του κυματοθραύστη.

1.4.3. Παλλόμενη ροή υπεράνω κυματοθραύστη με πορώδες

Η περίπτωση αυτή αφορά την μελέτη παλλόμενης ροής σε οριζόντιο αδιαπέρατο πυθμένα επί του οποίου τοποθετείται πορώδης (με πορώδες $n=0.60$) κυματοθραύστης με διάμετρο πορώδους ίση με $D_{50}=0.5\alpha_o$, όπου α_o είναι το παλλόμενο εύρος της εξωτερικής ροής. Η ύψαλος πορώδης κατασκευή με πρανή έχει εύρος στέψης ίσο με α_o , και κλίσεις πρανών ανάντη και κατόντη ίσες με $1/2$. Οι εξισώσεις Navier-Stokes τροποποιούνται έτσι ώστε να αφορούν μονοφασική ροή και να προσομοιώνουν τη ροή εντός πορώδους μέσου Liu et al. (1999).

Οι μεταβλητές του πεδίου ροής χωρίζονται σε δύο μέρη, τις μέσες χωρικά (σημ. επιγραμμή) και τις χωρικές διακυμάνσεις (σημ. δις τονούμενο) μέσω των εξισώσεων:

$$\begin{aligned} u_i &= \frac{\bar{u}_i + u_i''}{n} \\ p_o &= \bar{p}_o + p_o'' \end{aligned} \quad (1.24)$$

Οι εξισώσεις ροής διαμορφώνονται ως εξής:

$$\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (1.25)$$

$$\frac{1+c_A}{n} \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\bar{u}_i}{n} \frac{\bar{u}_j}{n} \right) = -\frac{\partial \bar{p}_o}{\partial x_i} + \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \left(\frac{\bar{u}_i}{n} \right) - \frac{1}{n^2} \frac{\partial \overline{u_i'' u_j''}}{\partial x_j} \quad (1.26)$$

όπου n είναι το ενεργό πορώδες της κατασκευής η οποία διαρρέεται από το ρευστό. Το πορώδες στον επιλυτή, είναι μέγεθος το οποίο υπολογίζεται στο κέντρο των κελιών του έκκεντρου πλέγματος, στην ίδια θέση που υπολογίζεται και η πίεση p_o . Επίσης:

$$\begin{aligned} c_A: & \text{σταθερά πρόσθετης μάζας} &= \gamma_p (1-n)/n \\ \gamma_p: & \text{εμπειρική σταθερά} &= 0.34 \end{aligned}$$

Ο τελευταίος όρος της εξίσωσης (1.26) μοντελοποιείται βάσει της ακόλουθης έκφρασης:

$$-\frac{1}{n^2} \frac{\partial \overline{u_i'' u_j''}}{\partial x_j} = -g a_p \bar{u}_i - g b_p u_c \bar{u}_i \quad (1.27)$$

όπου $u_c = \sqrt{\bar{u}_i \bar{u}_i}$ και οι όροι a_p και b_p δίνονται από τις εκφράσεις:

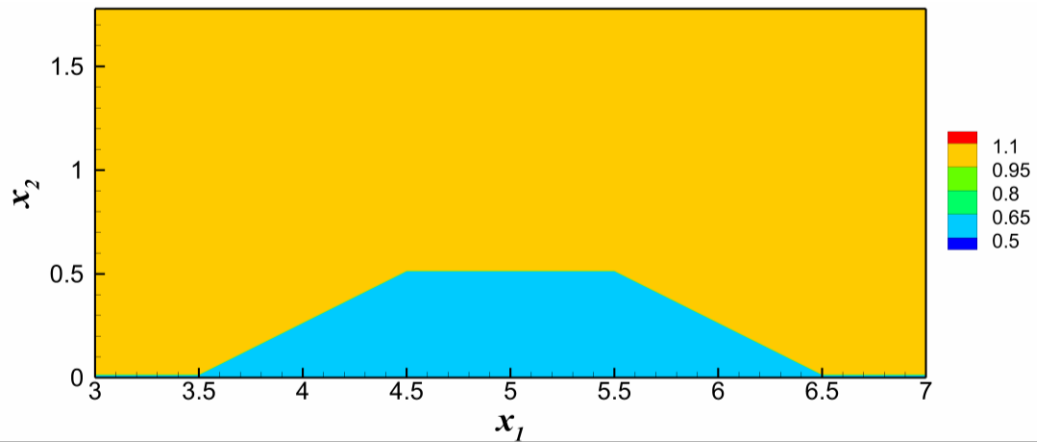
$$\begin{aligned} a_p &= 1000 \frac{(1-n)^2}{n^3} \frac{1}{\text{Re } g D_{50}^2} \\ b_p &= 1.1 \left(1 + \frac{7.5}{\text{KC}} \right) \frac{1-n}{n^3} \frac{1}{g D_{50}} \end{aligned} \quad (1.28)$$

και g είναι η επιτάχυνση της βαρύτητας, D_{50} είναι η χαρακτηριστική διάμετρος του πορώδους μέσου, και KC είναι ο αριθμός Keulegan-Carpenter για το πορώδες μέσο και δίνεται από τη σχέση:

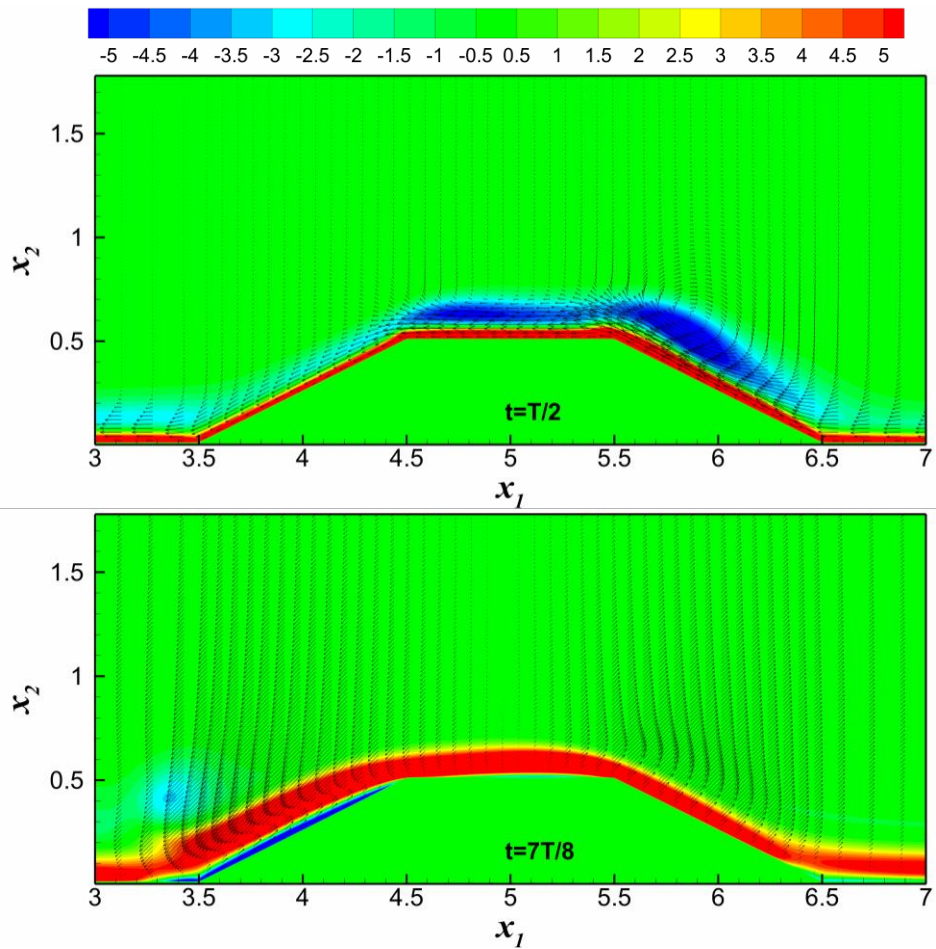
$$\text{KC} = \frac{u_c T}{n D_{50}} \quad (1.29)$$

όπου T είναι η περίοδος της εξωτερικής ροής.

Στο Σχήμα 1.14 φαίνεται η μορφή της πορώδους κατασκευής. Στο Σχήμα 1.15 παρουσιάζονται στιγμιότυπα του πεδίου στροβιλότητας και των διανυσμάτων ταχύτητας σε δύο χρονικές στιγμές εντός μίας περιόδου παλλόμενης ροής. Παρότι οι εξισώσεις Navier-Stokes επιλύονται εντός και εκτός της πορώδους κατασκευής, παρατηρείται η δημιουργία οριακού στρώματος στη διεπιφάνεια της πορώδους κατασκευής και του ρευστού.



Σχήμα 1.14: Σκαρίφηματική απεικόνιση του πορώδους κυματοθραύστη.



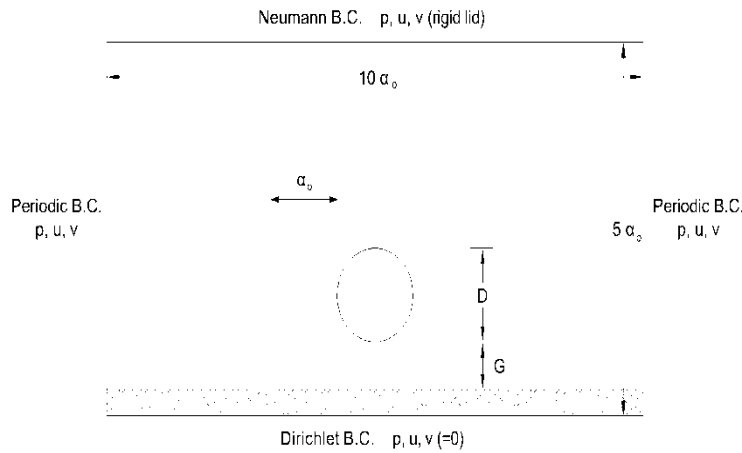
Σχήμα 1.15: Στιγμιότυπα της κατανομής της στροβιλότητας με διανύσματα της ταχύτητας υπεράνω και εντός του πορώδους κυματοθραύστη.

1.4.4. Παλλόμενη ροή υπεράνω οριζοντίου πυθμένα με παρουσία αγωγού κυκλικής διατομής

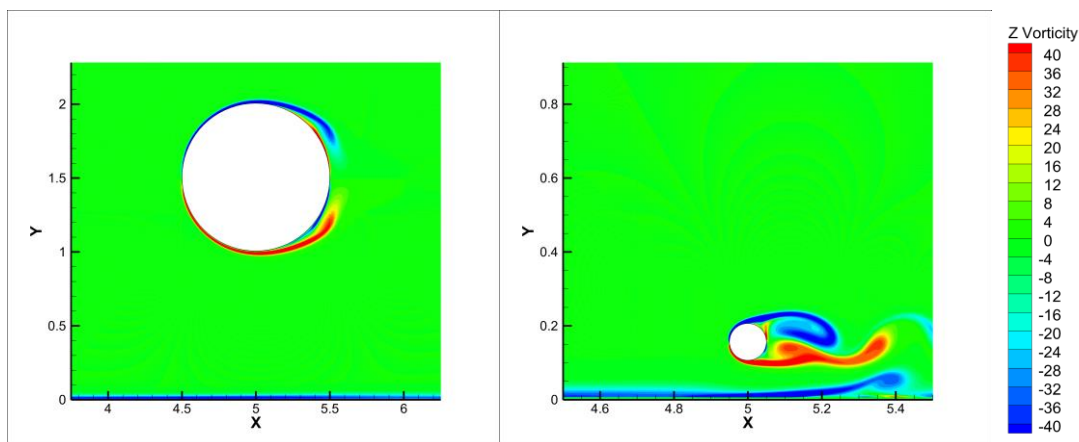
Η τελευταία υπό μελέτη περίπτωση αφορά τη δισδιάστατη παλλόμενη ροή υπεράνω οριζοντίου πυθμένα με παρουσία αγωγού κυκλικής διατομής για $Re = 5000$ με βάση το ημι-εύρος της παλλόμενης ροής. Πραγματοποιείται παραμετρική διερεύνηση της συμπεριφοράς της ροής συναρτήσει του ημι-εύρους ταλάντωσης της ροής, α_o , της διαμέτρου, D , του αγωγού και της απόστασης, G , της κάτω παρειάς του από τον οριζόντιο πυθμένα. Τα σενάρια προσομοίωσης συνοψίζονται στον Πίνακα 1.1. Προσδιορίζονται οι τιμές των συντελεστών αντίστασης, C_d , και άνωσης, C_l , μέσω ολοκλήρωσης της πίεσης και της διατμητικής τάσης στην επιφάνεια του αγωγού. Το αριθμητικό πεδίο δίνεται στο Σχήμα 1.16, ενώ ενδεικτικά αποτελέσματα της εξεταζόμενης ροής σε όρους στροβιλότητας δίνονται στο Σχήμα 1.17.

Πίνακας 1.1 Σενάρια προσομοίωσης παλλόμενης ροής σε αγωγό πλησίον πυθμένα.

	D/α_o	G/D	KC
1	0.1	0.1	62.8
2	0.1	1.0	62.8
3	1.0	0.1	6.3
4	1.0	1.0	6.3

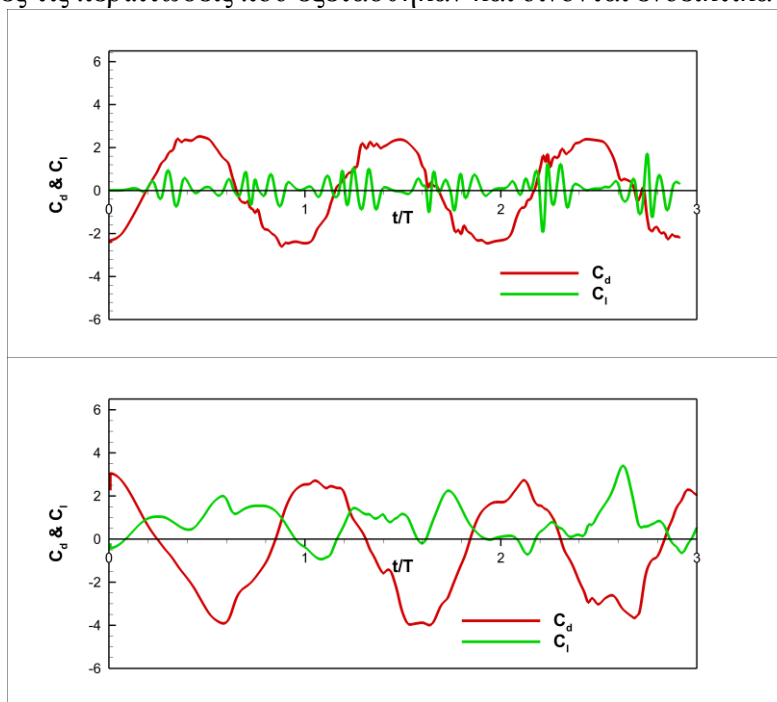


Σχήμα 1.16: Σκαριφηματική απεικόνιση του αριθμητικού πεδίου επίλυσης, επεξήγηση γεωμετρικών παραμέτρων και συνθηκών.



Σχήμα 1.17: Παλλόμενη ροή γύρω από αγωγό για (α) $D/a_o = 1$ και $G/D = 1$ και (β) $D/a_o = 1$ και $G/D = 1$ ($Re = 5000$). Γραμμές ίσης στροβιλότητας σε χρόνο $t/T = 0.25$, θετική τιμή αντιστοιχεί σε ανθρωρολογιακή στροβιλότητα και αρνητική τιμή ωρολογιακή.

Προσδιορίζεται η χρονική κατανομή των τιμών των συντελεστών αντίστασης, C_d , και άνωσης, C_l , σε όλες τις περιπτώσεις που εξετάστηκαν και δίνονται ενδεικτικά στο Σχήμα 1.18.



Σχήμα 1.18: Καταγραφή χρονοσειρών συντελεστών αντίστασης, C_d , και άνωσης, C_l , για (α) $D/a_o = 1$ και $G/D = 1$ και (β) $D/a_o = 1$ και $G/D = 1$ ($Re = 5000$) σε ακέραια πολλαπλάσια της εξωτερικής ροής.

Από τα αποτελέσματα των αναλύσεων προκύπτει ότι πλησιέστερα στον πυθμένα ενισχύεται η ανωστική δύναμη, και η ασυμμετρία της κατανομής των δυνάμεων και των αποκολλήσεων, ενώ ο αριθμός KC επηρεάζει την ένταση των αποκολλήσεων.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

- Balaras, E. (2004). “Modeling complex boundaries using an external force field on fixed Cartesian grids in large-eddy simulations”, *Computers & Fluids* 33, 375-404.
- Beji, S. & Battjes J.A. (1994). “Numerical simulation of nonlinear wave propagation over a bar”, *Coastal Engineering* 23, 1-16.
- Lei, C., Cheng, L., Armfield, S.W. and Kavanagh, K. (2000). “Vortex shedding suppression for flow over a circular cylinder near a plane boundary”, *Ocean Eng.* 27, 1109-1127.
- Liu, P.L.-F., P. Lin, K.-A. Chang, and T. Sakakiyama (1999). “Numerical modelling of wave interaction with porous structures”, *J. Wtrway., Port, Coast., and Oc. Eng.* ASCE 125: 322-329.
- Ong, M.C., Utnes, T., Holmedal, L.E., Myrhaug, D. and Pettersen, B. (2010). “Numerical simulation of flow around a circular cylinder close to a flat seabed at high Reynolds numbers using a k- ϵ model”, *Coastal Eng.* 57, 931-947.
- Peskin CS. (1972). “Flow patterns around heart valves: a numerical method”, *J. C. Phys.* 10, 252-71.
- Sethian, J.A. & Smereka P. (2003). “Level Set Methods for Fluid Interfaces”, *Annual Review of Fluid Mechanics* 35, 341-372
- Ting, F.C.K & Kirby, J.T. (1994). “Observation of undertow and turbulence in a laboratory surf zone”, *Coastal Engineering* 24, 51-80.
- Ting, F.C.K & Kirby, J.T. (1996). “Dynamics of surf-zone turbulence in a spilling breaker”, *Coastal Engineering* 27, 131-160.
- Yang J. & Stern F. (2009). “Sharp interface immersed-boundary/level-set method for wave-body interactions”, *J. Comput. Phys.* 228, 6590-6616.